衝突_10_気体分子のエネルギー分布関数を考える

組	番	

背景

気体分子は、頻繁に互いに衝突しているが衝突では**運動エネルギー**と**運動量**が**保存**する。そのため、**衝突によって相対速度の向きが変わるとエネルギーがやり取りされる。**したがって気体分子のエネルギーは1つの値になっているわけではなく、ある程度の範囲に拡がっていると考えられる。そこで運動エネルギーが x の気体分子の存在率を表す関数$f(x)$を求めることを考えてみる。

エネルギー分布関数が満たすべき関係

エネルギーx の分子 A とエネルギーy の分子 B が衝突する確率は、それぞれのエネルギーを持った分子が存在する確率をかけあわせた値 $f(x)\times f(y)$に比例するだろう。この確率で、エネルギーx の分子が一つ減り、エネルギーy の分子も1つ減る。しかし、膨大な分子同士の衝突で、全体としては各エネルギーの分子の数は変わらず一定になっていると考えられる。そのためには、同じ$f(x)\times f(y)$の確率で $z+w=x+y$ を満たすエネルギーz の分子 C とエネルギーw の分子 D が衝突して、エネルギーx と y の分子がそれぞれ1つずつ増えているはずである。この衝突の確率は $f(z)\times f(w)$に比例するので、$f(x)$は次のような性質を持つ関数だと考えられる。

$f(x)\times f(y)=f(z)\times f(w)$ （ただし $x+y=z+w$ を満たす全ての x,y,z,w に対して）

具体的な例として、同じエネルギーx を持った分子が 90 度の角度で衝突した後、共に同じ方向に飛んだ場合は、エネルギー保存則と運動量保存則を連立して解くと、一方が静止してエネルギー0 になりもう一方がエネルギー$2x$ になることがわかる。この例を代入すると

$f(x)\times f(x)=f(0)\times f(2x)$

となる。

両辺を $f(0)^2$ で割って$F(x)=\frac{f(x)}{f(0)}$という関数を考えると

$\boxed{F(x)\times F(x)=F(x)^2=F(2x)}$ ・・・(＊)

より一般的に、エネルギーx を持った分子とエネルギーy を持った分子が 90°の角度で衝突し共に同じ方向に飛んだ場合は、エネルギー保存則と運動量保存則を連立して解くと、一方が静止してエネルギー0 に、一方がエネルギー$x+y$ になる。

$\boxed{F(x)\times F(y)=F(x+y)}$ ・・・(＊＊)

$\boxed{F(0)=1}$ ・・・(＊＊＊)

となるので、この性質（＊）（＊＊）（＊＊＊）を満たす関数$F(x)$をまず探すことにしよう。

また、$0< x <\infty$の範囲で考えると$x=\infty$で発散しては、もとの$f(x)$が確率を表すため 1 以下の関数であることと矛盾するので、$x=\infty$で発散しない関数である。

課題 （＊）（＊＊）（＊＊＊）を満たす$F(x)$はどのような関数か。